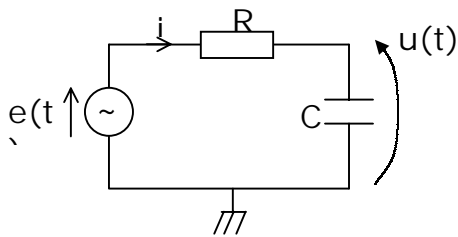


RESEAUX LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL FORCE (RSF)

Plan (Cliquez sur le titre pour accéder au paragraphe)

| | | |
|------|---|----|
| I. | Exemple préliminaire..... | 1 |
| II. | La notation complexe..... | 2 |
| III. | Impédance et admittance complexe..... | 3 |
| IV. | Théorèmes pour les circuits linéaires en RSF..... | 6 |
| V. | Etude du circuit RLC série en RSF..... | 9 |
| VI. | Puissance en régime sinusoidal forcé..... | 12 |

I. Exemple préliminaire.



Alimentons un circuit (R,C) par un générateur sinusoidal de fem $e(t) = E\sqrt{2} \cos \omega t$.

Alors :
$$e(t) = Ri + u = RC \dot{u} + u$$

L'équation différentielle sur $u(t)$ est donc :

$$\tau \dot{u} + u = E \sqrt{2} \cos \omega t \quad (1)$$

En régime RSF, on ne s'intéresse qu'à une solution particulière de cette équation, et on cherche :

$$u(t) = U \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi)$$

Alors :
$$\dot{u} = -\omega U \sqrt{2} \sin (\omega t + \varphi)$$

Et en reportant dans (1) :

$$-\omega \tau U \sin (\omega t + \varphi) + U \cos (\omega t + \varphi) = E \cos \omega t$$

$$\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\cos \omega t [\omega \tau \sin \varphi + \cos \varphi] + \sin \omega t [-\omega \tau \cos \varphi - \sin \varphi] = \frac{E}{U} \cos \omega t, \quad \forall t$$

ce qui implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\omega \tau \cos \varphi - \sin \varphi = 0 \\ -\omega \tau \sin \varphi - \cos \varphi = \frac{E}{U} \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\cos \varphi = -\tau \omega$$

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{-\tau \omega}{\sqrt{1 + \tau \omega^2}} \\ \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \end{cases}$$

Donc :

$$U = \frac{E}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

On voit que, pour un circuit très simple, les calculs en notation réelle sont assez longs. Nous allons donc utiliser la notation complexe, qui permettra de résoudre de manière élégante et assez rapide les exercices et problèmes sur les circuits linéaires en RSF.

II. La notation complexe.

II.1. Définitions.

Soit $x(t) = X \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ une grandeur sinusoïdale de pulsation ω .

*On associe à $x(t)$ sa grandeur complexe instantanée :

$$\underline{x}(t) = X \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Rem. : en physique, "i" = $e^{i\pi/2}$ est souvent noté "j", en particulier en électricité pour éviter une confusion avec l'intensité.

On a alors :

$$x(t) = \text{Re}(\underline{x}(t))$$

*On pose aussi :

$$\underline{X} = X_M e^{j\varphi} = X \sqrt{2} e^{j\varphi}$$

(ou parfois $\underline{X} = X e^{j\varphi}$)

\underline{X} est l'amplitude complexe associée à $x(t)$: pour une pulsation ω donnée, la connaissance de \underline{X} donne X et φ , donc caractérise parfaitement la grandeur $x(t)$.

II.2. Intérêt : il s'agit de remplacer toute relation différentielle linéaire par une relation linéaire non différentielle. En effet :

$$\begin{cases} \dot{x} = (j\omega) x \\ \ddot{x} = (j\omega)^2 x = -\omega^2 x \\ x^{(n)} = (j\omega)^n x \end{cases}$$

Dériver en notation complexe revient donc à multiplier par $j\omega$.

Rem. : $j = e^{i\pi/2}$, et on retrouve que dériver une fonction sinusoïdale revient à ajouter $\pi/2$ à l'argument (rotation de $\frac{\pi}{2}$) :

$$\frac{d}{dt} (\cos \omega t) = \cos (\omega t + \pi/2) = -\sin \omega t$$

De même :

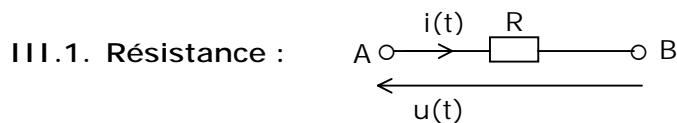
$$\int x(t) dt = \frac{1}{j\omega} x$$

III. Impédance et admittance complexe.

Nous admettons ici la propriété mathématique suivante :

$$x(t) = y(t), \forall t \Leftrightarrow \underline{x}(t) = \underline{y}(t)$$

Alors :



$$u(t) = R i(t) \Leftrightarrow \underline{u}(t) = R \underline{i}(t)$$

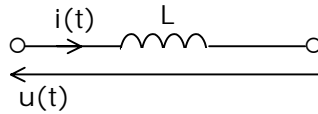
On pose alors :

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U}{I} = \underline{Z} \quad \text{impédance complexe du dipôle}$$

Pour une résistance :

$$\underline{Z} = R \in \mathbb{R}$$

III.2. Bobine :

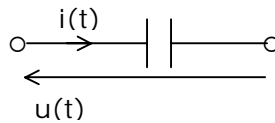


$$u(t) = L \dot{i}(t) \Leftrightarrow \underline{u}(t) = L \underbrace{\dot{i}(t)}_{j\omega i}$$

Ainsi :

$$\underline{u} = (jL\omega) \underline{i} \quad : \quad \underline{Z} = jL\omega$$

III.3. Condensateur :

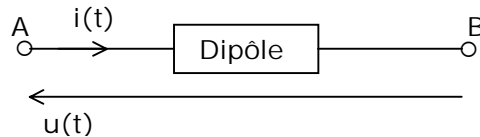


$$i(t) = C \dot{u}(t) \Leftrightarrow \underline{i}(t) = C \dot{\underline{u}}(t) = C (j\omega \underline{u})$$

Ainsi

$$\underline{u} = \frac{1}{jC\omega} \underline{i} \quad : \quad \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$$

III.4. Généralisation : soit un dipôle AB en RSF :



Posons :

$$\begin{cases} i(t) = I \sqrt{2} \cos \omega t \Leftrightarrow \underline{i}(t) = I \sqrt{2} e^{j\omega t} \\ u(t) = U \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{u}(t) = U \sqrt{2} e^{j\omega t} e^{j\varphi} \end{cases}$$

On définit alors :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U}{I} \quad , \quad \text{impédance complexe du dipôle}$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad , \quad \text{admittance complexe du dipôle}$$

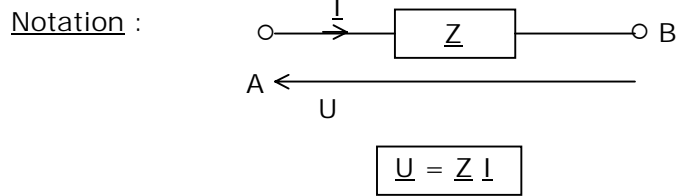
On voit alors que :

$$|\underline{Z}| = Z = \frac{U}{I} \quad (\text{« impédance » en } \Omega \text{ du dipôle)}$$

$$\text{Arg}|\underline{Z}| = \varphi = \text{déphasage } u/i$$

De même :

$$\begin{cases} |\underline{Y}| = Y = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z} \quad (\text{en S}) \\ \text{Arg}|\underline{Y}| = -\varphi = \text{déphasage } i/u \end{cases}$$

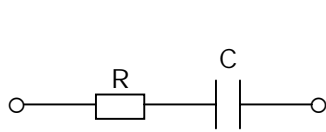


Et on retiendra :

$$\begin{cases} \underline{Z}_R = R & \left| \begin{array}{l} Z_R = R \\ \varphi = 0 \end{array} \right. \\ \underline{Z}_L = j L \omega & \left| \begin{array}{l} Z_L = L \omega \\ \varphi = + \Pi/2 \end{array} \right. \\ \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} & \left| \begin{array}{l} Z_C = \frac{1}{C\omega} \\ \varphi = -\Pi/2 \end{array} \right. \end{cases}$$

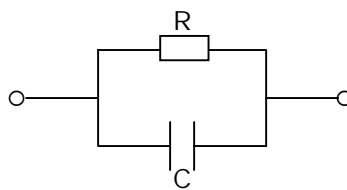
III.5. Exemples de calcul : les lois des nœuds et des mailles restant valables en notation complexe, on aura :

$$\begin{array}{l} \underline{Z} = \sum_i \underline{Z}_i \quad \text{en série} \\ \underline{Y} = \sum_i \underline{Y}_i \quad \text{en parallèle} \end{array}$$



$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

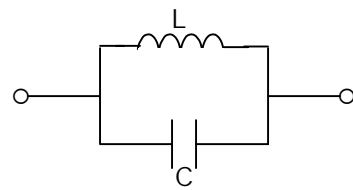
$$\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \\ \varphi = - \text{Arctan} \left(\frac{1}{RC\omega} \right) \end{cases}$$



$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R}$$

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\begin{cases} Z = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}} \\ \varphi = - \text{Arctan } RC\omega \end{cases}$$



$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$\begin{cases} Z = \frac{L\omega}{|1 - LC\omega^2|} \\ \varphi \pm \Pi/2 \end{cases}$$

Rem. : dans tous les calculs en RSF, on retrouve des groupements sans dimension, du type :

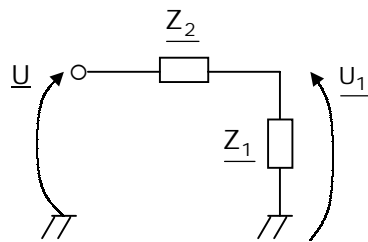
$$RC\omega, \frac{L\omega}{R}, LC\omega^2\dots$$

(ce qui permet de vérifier l'homogénéité des résultats obtenus).

IV. Théorèmes pour les circuits linéaires en RSF.

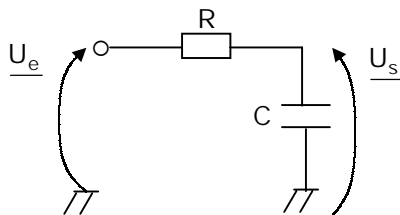
La relation $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ généralisant, en notation complexe, la loi d'Ohm ; les lois des nœuds et des mailles restant valables en notation complexe : tous les théorèmes vus en I et II (diviseurs de tension et courant, théorème de Millmann, transformation triangle/étoile, théorème de superposition, théorème de Thévenin/Norton) restent valables en RSF, à condition d'utiliser la notation complexe.

IV.1. Diviseur de tension.



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}$$

Ex :



$$\underline{U}_s = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{U}_e$$

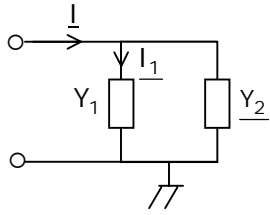
Soit

$$\underline{U}_s = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_e$$

Rem. : on retrouve l'exemple préliminaire, et donc beaucoup plus rapidement que :

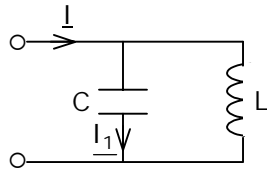
$$\frac{U_s}{U_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

IV.2. Diviseur de courant.



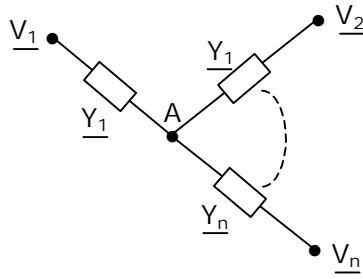
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \underline{I}$$

Ex :



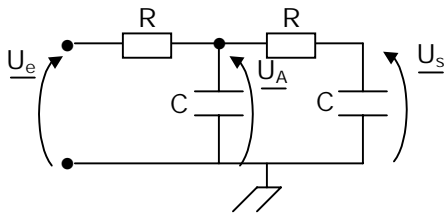
$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{j\omega C}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} \underline{I} \\ &= \frac{L\omega^2}{1 - L\omega^2} \underline{I} \end{aligned}$$

IV.3. Théorème de Millmann.



$$\underline{V}_A = \frac{\sum \underline{Y}_k \underline{V}_k}{\sum \underline{Y}_k}$$

Ex. : double cellule (R, C)



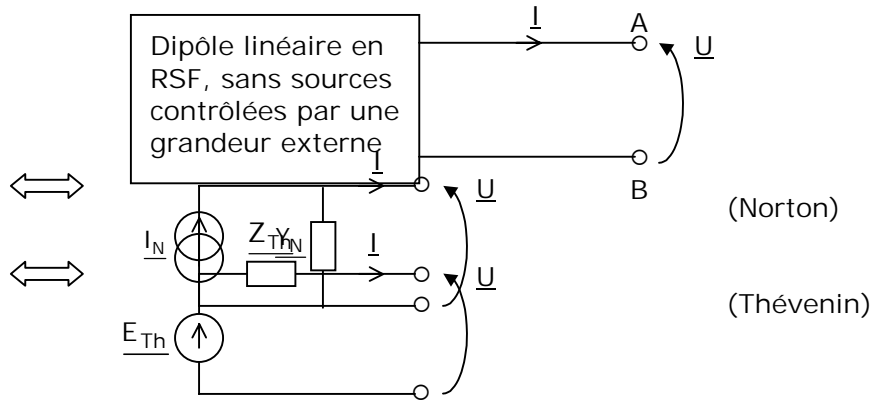
On se propose de calculer \underline{U}_s en fonction de \underline{U}_e , R et C.

$$\begin{cases} \underline{U}_s = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{U}_A & \text{(diviseur de tension)} \\ \underline{U}_A = \frac{1/R \underline{U}_e + 1/R \underline{U}_s + j\omega \times 0}{1/R + 1/R + j\omega} & \text{(Millmann)} \\ & = \frac{\underline{U}_e + \underline{U}_s}{2 + jRC\omega} \end{cases}$$

En éliminant \underline{U}_A , on obtient :

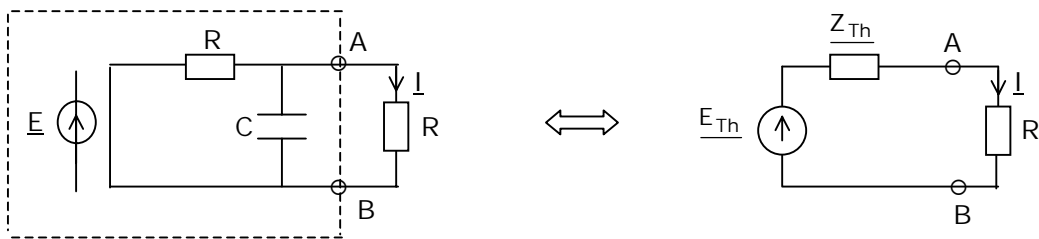
$$\underline{U}_s = \frac{1}{1 + 3 jRC\omega - R^2 C^2 \omega^2} \underline{U}_e$$

IV.4. Théorème de Thévenin/Norton.



Avec toujours : $\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_{Th}}$, $\underline{I}_N = \frac{\underline{E}_{Th}}{\underline{Z}_{Th}}$, les calculs de \underline{E}_{Th} , \underline{I}_N et \underline{Z}_{Th} se faisant comme précisé en régime permanent.

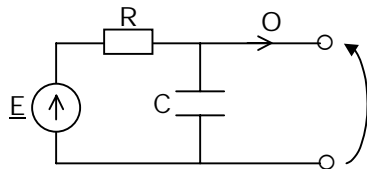
Exemple : On se propose de calculer \underline{I} dans le circuit suivant :



Sur le schéma équivalent :

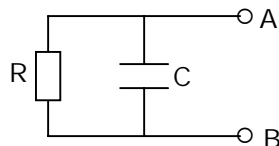
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{Th}}{R + \underline{Z}_{Th}}$$

*Calcul de $\underline{E}_{Th} = \underline{U}_O$ (à vide) :



$$\underline{E}_{Th} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E}$$

*Calcul de \underline{Z}_{Th} : on éteint la source ($\underline{E} = 0$)



$$\underline{Z}_{Th} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Alors :

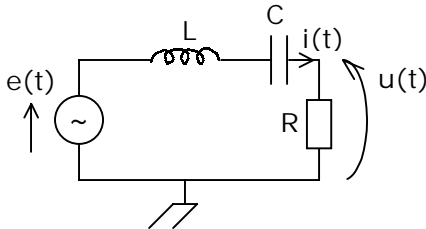
$$\underline{I} = \frac{\frac{E}{1 + jRC\omega}}{R + \frac{R}{1 + jRC\omega}}$$

Soit :

$$\underline{I} = \frac{E}{R(2 + jRC\omega)}$$

V. Etude du circuit RLC série en RSF.

V.1. « Résonance en intensité » : on cherche à étudier l'évolution de la valeur efficace I de $i(t)$ lorsque ω varie. Pour ce faire, on peut étudier la tension aux bornes de R :



Le diviseur de tension donne :

$$\underline{U} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} E$$

$e(t) = E\sqrt{2} \cos\omega t$

$$\Rightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} E$$

En introduisant $\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} \end{array} \right.$, on obtient :

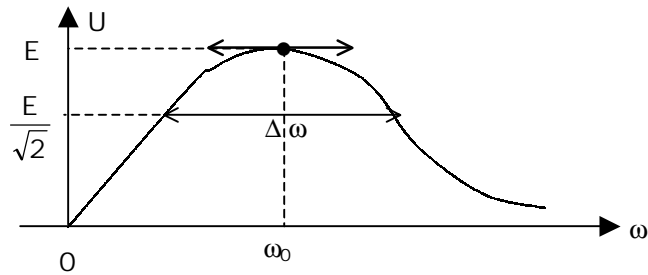
$$\underline{U} = \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} E$$

Ainsi :

$$U = |\underline{U}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} E$$

- $\omega = 0 : U = 0$
- $\omega \rightarrow \infty : U \rightarrow 0$
- U est maximale si $\omega = \omega_0$, et $U_{\max} = E$

L'allure de la courbe $U(\omega)$ est donc la suivante :

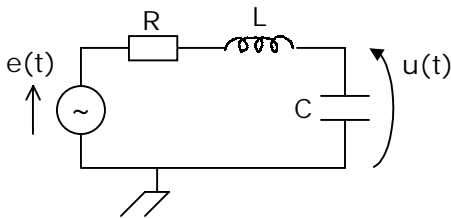


Pour $\omega = \omega_0$, on dit qu'il y a résonance d'intensité dans le circuit RLC série. A la résonance : $\underline{Z} = R$: $u(t) = e(t) = Ri(t)$ ($i(t)$ est en phase avec $e(t)$).

Rem. : en électronique, un tel circuit sera appelé filtre passe-bande (cf V). La « bande passante » $\Delta\omega$ est définie à $\frac{E}{\sqrt{2}}$. Nous montrerons que $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0}$.

V.2. Résonance en tension aux bornes de C.

On étudie cette fois la tension aux bornes du condensateur.



Toujours avec le diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} E$$

Soit :

$$\underline{U} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0 Q_0}\right)} E$$

Posons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ (« pulsion réduite », sans dimension) :

$$U = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^2 + \left(\frac{x}{Q_0}\right)^2}} E$$

On cherche aussi à tracer l'allure de la courbe $U(\omega)$ ou $U(x)$.

- Pour $x = 0$: $U = E$
- Pour $x \rightarrow \infty$: $U \rightarrow 0$
- Recherche d'un extremum de $U(x)$

Posons $X = x^2$; $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q_0^2}$

$$U = \frac{1}{\sqrt{f(X)}} E \quad : \quad \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dX} \frac{dX}{dx} = 2 x \frac{dU}{dX}$$

Soit : $\frac{dU}{dx} = 2 x E \left(-\frac{1}{2} f(X)^{-3/2}\right) f'(X)$

Ainsi : $\frac{dU}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } f'(X) = 0$

Or : $f'(X) = -2(1-X) + \frac{1}{Q_0^2}$

1^{er} cas : $Q_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f'(X)$ ne peut s'annuler.

La courbe $U(x)$ ne présente pas d'extremum autre que $x = 0$.

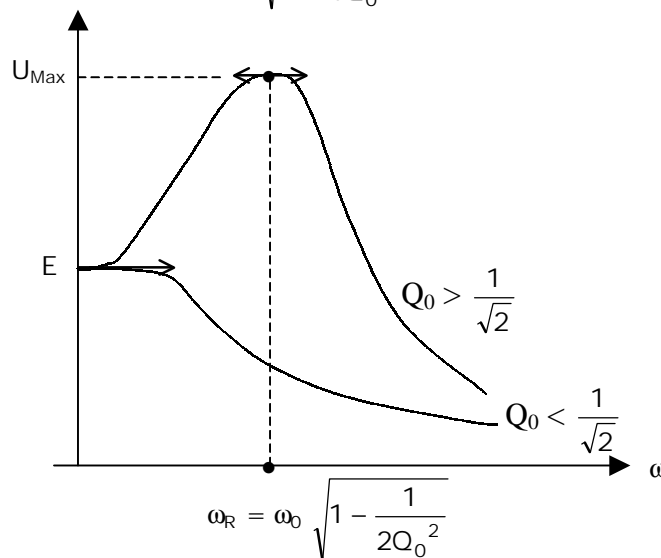
2^e cas : $Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f'(X) = 0$ pour $x = x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}$

La courbe $U(x)$ présente donc un maximum (on peut vérifier que $\frac{dU}{dx} > 0$ si $x < x_R$ et $\frac{dU}{dx}$

< 0 si $x > x_R$) pour $x = x_R$.

De plus :

$$U_{\text{Max}} = \frac{Q_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}} E$$



On dit donc qu'il y a résonance de tension aux bornes de C si $Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rem. : Si $Q_0 \gg 1$: $\omega_R \approx \omega_0$ (la pulsation de résonance est quasi confondue avec la pulsation propre).

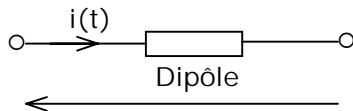
De plus, dans ce cas : $U_{Max} \approx Q_0 E \gg E$. Ainsi, on appelle parfois Q_0 facteur de « surtension ».

Le phénomène peut devenir dangereux ou conduire au « claquage » du condensateur, puisque par exemple, pour $E = 2 V$, $Q_0 = 100$: $U_{Max} \approx 200 V$.

De la même manière, en mécanique, les phénomènes de résonance lors de secousses telluriques ou passage de camions peuvent s'avérer dangereux pour les structures (ponts à haubans...), et les ingénieurs cherchent à s'en protéger ; le phénomène est complexe, puisque l'excitation n'est pas sinusoïdale.

VI. Puissance en régime sinusoïdal forcé.

VI.1. Définitions :



$$\begin{cases} i(t) = I \sqrt{2} \cos \omega t \\ u(t) = U \sqrt{2} \cos (\omega t + \varphi) \end{cases}$$

* $P(t) = u(t) i(t)$ est la puissance instantanée consommée par le dipôle.

* $P_{app} = U I$ est la puissance « apparente »

* $P = \langle p \rangle$ est la puissance « moyenne » ou « active » réellement consommée par le dipôle.

VI.2. Expression de P.

$$\begin{aligned} p(t) &= 2 UI \cos \omega t \cos (\omega t + \varphi) \\ &= UI [\cos (2\omega t + \varphi) + \cos \varphi] \end{aligned}$$

Ainsi :

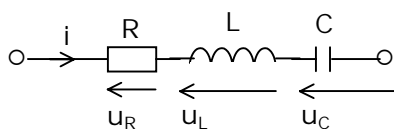
$$P = UI \cos \varphi \geq 0$$

Exemples :

* Résistance : $P = RI^2$

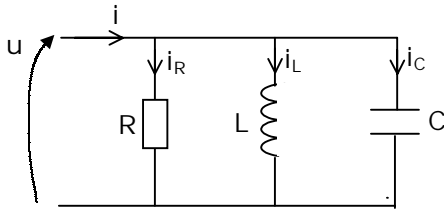
* Bobine et condensateur : $P = 0$

* Circuit RLC série :



$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) i(t) = u_R i + u_L i + u_C i \\ \Rightarrow \langle p \rangle &= P = \langle u_R i \rangle = RI^2 \end{aligned}$$

*Circuit RLC parallèle :



$$p = ui = u i_R + u i_L + u i_C$$

$$\Rightarrow \langle p \rangle = P = \langle u i_R \rangle = \frac{U^2}{R}$$

VI.3. Calcul en notation complexe.

On a :

$$\begin{cases} \underline{u} = U\sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi)} \\ \underline{i} = I\sqrt{2} e^{j\omega t} \end{cases}$$

Ainsi :

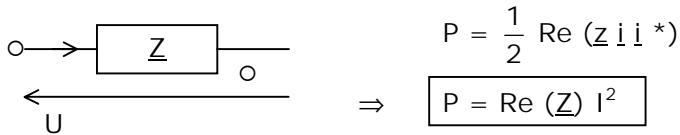
$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\underline{u} \underline{i}^*)$$

Rem. : on pose parfois

$$\underline{p} = \frac{1}{2} \underline{u} \underline{i}^* \quad \text{puissance complexe}$$

$$\begin{cases} P = \operatorname{Re}(\underline{p}) = UI \cos \varphi & \text{puissance active} \\ Q = \operatorname{Im}(\underline{p}) = UI \sin \varphi & \text{puissance "réactive"} \end{cases}$$

Pour un dipôle d'impédance complexe \underline{Z} , on a alors :



Ex. : circuit RLC série :

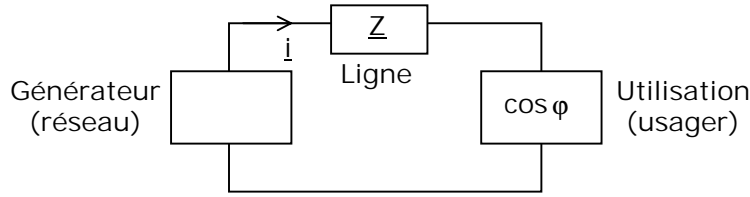
$$\underline{Z} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

$$\Rightarrow P = R I^2$$

VI.4. Facteur de puissance : c'est le « $\cos \varphi$ » d'une installation électrique :

$$\cos \varphi = \frac{P}{P_{\text{app}}}$$

Intérêt : soit un générateur alimentant une utilisation à travers une ligne de transport :



$$\left\{ \begin{array}{l} P_u = UI \cos \varphi \text{ est la puissance utile} \\ P_{\text{gén}} \text{ la puissance moyenne délivrée par le générateur} \\ P_{\text{ligne}} = RI^2 \text{ la puissance moyenne consommée par la ligne } (\underline{Z} = R + jX) \end{array} \right.$$

Le rendement énergétique de l'ensemble est :

$$\eta = \frac{P_u}{P_{\text{gén}}} = \frac{1}{1 + \frac{P_{\text{ligne}}}{P_u}}$$

η est donc une fraction décroissante de :

$$\frac{P_{\text{ligne}}}{P_u} = \frac{R I^2}{P_u} = \frac{R P_u}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

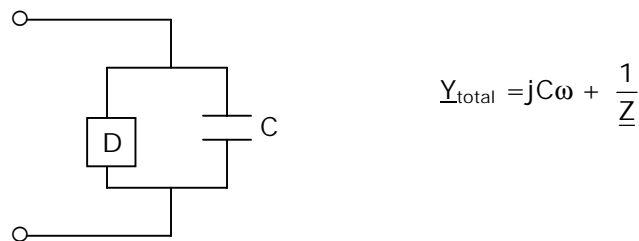
Pour augmenter η , il faut minimiser $\frac{P_{\text{ligne}}}{P_u}$, donc :

- * Diminuer R (augmenter la section des câbles)
- * Augmenter U (hautes tensions)
- * Augmenter $\cos \varphi$ (en pratique $\cos \varphi > 0,9$)

Ex. : soit un dipôle d'impédance complexe

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$$

Pour augmenter $\cos \varphi$, on peut placer en parallèle sur le dipôle un condensateur :

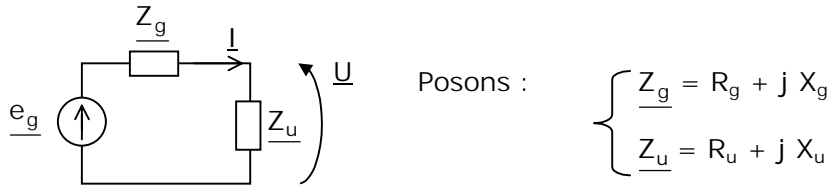


On veut $\cos \varphi_{\text{total}} = 1 \Leftrightarrow \underline{Y}_{\text{total}} \in \mathbb{R}$

$$C \omega - \frac{1}{Z} \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{Z\omega} \sin \phi$$

VI.5. Adaptation d'impédances : on cherche à avoir P_u maximale.



Alors :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_u}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g} E_g \quad ; \quad \underline{I} = \frac{E_g}{\underline{Z}_u + \underline{Z}_g}$$

$$P_u = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\underline{U} \underline{I}^*) = E_g^2 \frac{\operatorname{Re}(\underline{Z}_u)}{|\underline{Z}_u + \underline{Z}_g|^2}$$

Soit :

$$P_u = E_g^2 \frac{R_u}{(R_u + R_g)^2 + (X_u + X_g)^2}$$

On voit alors que P_u maximale pour $X_u = -X_g$; on se ramène alors au cas étudié en régime continu, donc $R_g = R_u$ correspond à P_{uMax} . Finalement, l'adaptation d'impédances sera réalisée si :

Alors :

$$\underline{Z}_u = \underline{Z}_g^*$$

$$P_{uMax} = \frac{E_g^2}{4 R_g}$$